Funktionale Abhängigkeiten Aufgabe B1 - Lösungserwartung

1.0 Die Punkte $R(-4|-6)$ und $S(6|-1)$ sind die Schnittpunkte der Parabel p mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + 2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und der Geraden g mit der Gleichung $y = 0{,}5x - 4$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.1 Bestätigen Sie durch Berechnung der Koeffizienten a und b, dass sich die Parabel p durch die Gleichung $y = -0{,}25x^2 + x + 2$ beschreiben lässt.

Die Koordinaten der Punkte R und S in die allgemeine Form der Parabel y=ax²+bx+2 einsetzen und über ein lineares Gleichungssystem (LGS) die Koeefizienten a und b bestimmen.

$R(-4|-6)$ in p:

$$-6 = a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + 2 \qquad |-2$$

$$-8 = 16a - 4b \qquad |-16a$$

$$-8 - 16a = -4b \qquad |:(-4)$$

$$b = 2 + 4a \qquad (1)$$

$S(6|-1)$ in p:

$$-1 = a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + 2 \qquad |-2$$

$$-3 = 36a + 6b \qquad (2)$$

(1) in (2):

DG

$$-3 = 36a + 6\cdot(2 + 4a)$$

$$-3 = 36a + 12 + 24a \qquad |-12$$

$$-15 = 60a \qquad |:60$$

$$\underline{\underline{a = -0{,}25}}$$

a in (1)

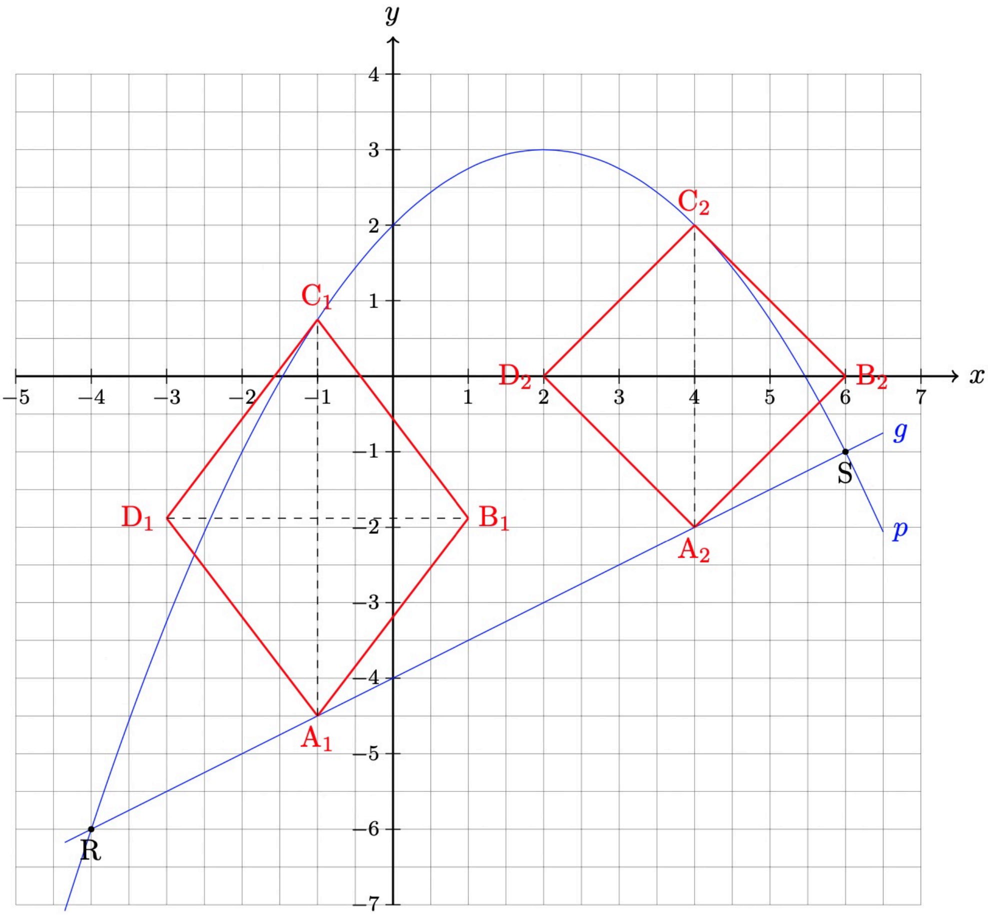
$$b = 2 + 4\cdot(-0{,}25)$$

$$\underline{\underline{b = 1}}$$

$$\Rightarrow \quad p: \; y \underline{\underline{= -0{,}25x^2 + x + 2}}$$

1.2 Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Für die Zeichnung gilt: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 7$; $-7 \leqq y \leqq 4$.

1.3 Die Punkte $A_n(x|0{,}5x-4)$ auf der Geraden g und die Punkte $C_n(x|-0{,}25x^2+x+2)$ auf der Parabel p haben dieselbe Abszisse x und sind die Eckpunkte von Rauten $A_nB_nC_nD_n$. Für die Länge der Strecken $[B_nD_n]$ gilt: $\overline{B_nD_n} = 4{,}0$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ für $x = -1$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem ein.



1.4 Bestätigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecke $[A_nC_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$\overline{A_nC_n} = [-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6] \text{ LE}$$

Da die Punkte A_n und C_n dieselbe Abszisse haben (*also im KOSY senkrecht übereinander liegen*), gilt hier:

$$\boxed{\overline{A_nC_n}(x) = y_{oben} - y_{unten}} = y_C - y_A$$

$$= [-0{,}25x^2 + x + 2 - (0{,}5x - 4)] \text{ LE}$$

$$= [-0{,}25x^2 + x + 2 - 0{,}5x + 4] \text{ LE}$$

$$= \underline{\underline{[-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6] \text{ LE}}}$$

1.5 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$A(x) = [-0{,}5x^2 + x + 12] \text{ FE}$$

Da die Diagonalen der Rauten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems verlaufen, müssen für die Flächenberechnung keine Vektoren benutzt werden, sondern es kann die Formel A = 0,5·e·f verwendet werden.

$$\boxed{A = \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot f} = \tfrac{1}{2} \cdot \overline{A_nC_n} \cdot \overline{B_nD_n} \qquad \text{mit } \overline{B_nD_n} = 4 \text{ LE}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6) \cdot 4 \text{ FE}$$

$$= 2 \cdot (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6) \text{ FE}$$

$$= \underline{\underline{[-0{,}5x^2 + x + 12] \text{ FE}}}$$

1.6 Unter den Rauten $A_nB_nC_nD_n$ besitzt die Raute $A_3B_3C_3D_3$ einen maximalen Flächeninhalt. Bestimmen Sie den Flächeninhalt A_{max} der Raute $A_3B_3C_3D_3$ und den zugehörigen Wert für x.

$a = -0{,}5$

$b = 1$

$c = 12$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-0{,}5)} = 1$$

$$A_{max} = c - \frac{b^2}{4a} = 12 - \frac{1^2}{4 \cdot (-0{,}5)} = 12{,}5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_{max} = 12{,}5 \text{ FE}}} \text{ für } \underline{\underline{x = 1}}$$

1.7 Die Raute $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 4$ ist ein Quadrat. Zeigen Sie, dass es unter den Rauten $A_nB_nC_nD_n$ eine weitere Raute gibt und bestimmen Sie den zugehörigen Wert für x.

Ein Quadrat liegt genau dann vor, wenn die beiden Diagonalen $[A_nC_n]$ und $[B_nD_n]$ gleich lang sind. Somit muss gelten:

$$\overline{A_nC_n} = 4\ LE$$

$$-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 6 = 4 \qquad | -4$$

$$-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2 = 0$$

$a = -0{,}25$ $\qquad D = b^2 - 4ac$

$b = 0{,}5$ $\qquad\quad = 0{,}5^2 - 4\cdot(-0{,}25)\cdot 2$

$c = 2$ $\qquad\quad\ = 2{,}25$

$D > 0 \Rightarrow$ 2 Lösungen

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Quadrate

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0{,}5 \pm 1{,}5}{2\cdot(-0{,}25)} \qquad x_1 = 4 \qquad \underline{\underline{x_2 = -2}}$$